موقع رااااائع للمقارنة بين أي شيئين ، في أي مجال! يُقارن كل شيء مُرتبط بينهم و يُعطيك الإختلافات بينهم على شكل جدول http://www.diffen.com/ تدريس الرياضيات بطريقة الاكتشاف

د. علي عثمان- سخنين - أكاديمية القاسمي- باقة الغربية

تتلخص طريقة الاكتشاف في تدريس الرياضيات بتوجيه الطلاب لحل المسائل عن طريق إجراء التجارب واستخلاص النتائج إلى أن ينطقوا بالنظرية.

إذا حدث هذا واكتشف التلاميذ النظرية فإن السعادة ستغمرهم بسبب شعورهم بالنصر وازدياد ثقتهم بأنفسهم. بعدها سيطلبون المزيد من التحديات وستزداد قدراتهم على حل المسائل. ولكن ينبغي أن يكون المعلم حكيماً في اختياره للمسألة، إذ يجب أن تكون في مستوى قدرات التلاميذ وعليه أن يكون فناناً في توجيه إرشاداته المتعلقة بالزمن وبتفاعل التلاميذ مع المسألة وسلوكهم، لا يسابق التلاميذ إلى اكتشاف النظرية أو الحل، معززاً لنتائجهم الصحيحة الأولية، مصلحاً للأخطاء التي يقع فيها بعضهم ومحفزاً إيّاهم على التصحيح.

إن رغبة التلاميذ في الاكتشاف تؤدي إلى قبولهم تعلم المهارات الحسابية والجبرية والتي هي بمثابة الوسيلة لأجل الوصول إلى الهدف المنشود، ألا وهو الاكتشاف. كما أن معرفتهم بوجوب شكهم بجواز صدق الاكتشاف عموماً وجواز خطئه خصوصاً، يدفعهم إلى تعلم الطرق التحليلية وتعلم طرق البرهان.

إن ما يؤخذ سلباً على تدريس الرياضيات في الجامعات هو انعدام طريقة الاكتشاف في التدريس. يشعر الطلاب في غالبيتهم بالضياع، وينتقدون التعليم بقولهم:"كل الرياضيات هي مجرد تعريفات ونظريات وبراهين، وكل ما علينا عمله هو حفظ المادة غيباً". يعود سبب ذلك لضخامة المادة المقرر تدريسها وضيق الوقت بالنسبة لها وكثرة الطلاب في المحاضرات. لكن الأمر مختلف في المدارس الابتدائية والإعدادية، فلا وجود لمشكلة ضيق الوقت بالنسبة للمواد وأما مشكلة كثرة الطلاب فمن الممكن التغلب عليها عن طريق تقسيم التلاميذ إلى مجموعات عمل

صغيرة. كذلك فإن المحاضر في الجامعة يفترض أن طلابه يرغبون في تعلم الرياضيات وأن لديهم الخيال الواسع لتوقع النظريات والقدرة على التفكير المجرد.إن هذه الأمور لا تتوفر في التلميذ الصغير وعلى المعلم أن يعمل على بنائها فيه. إحدى الوسائل المركزية هي تدريس موضوع الرياضيات حسب طريقة الاكتشاف.

أما في كليات إعداد المعلمين والتي تخرج المعلمين لتعليم تلاميذ المرحلتين الابتدائية والإعدادية، فمن الواجب بناء المسافات بشكل يسمح بتدريس بعض المواد بواسطة طريقة الاكتشاف، حتى يتوجه تفكير معلم المستقبل إلى العمل على تنفيذ هذه الطريقة مع طلابه. ومن واجب المحاضرين في هذه الكليات معاينة مواد التدريس في المرحلتين الابتدائية والإعدادية والعمل مع طلابهم على إمكانية تدريس هذه المواد وفقاً لطريقة الاكتشاف.

سأورد فيما يلي بعض المسائل وحلها حسب طريقة الاكتشاف:

المسألة الأولى:

ما هو رقم آحاد العدد $٢^{١٠٥}$؟

إن الآلة الحاسبة التي بين أيدي التلاميذ لن تسعفهم في حل هذه المسألة. إذ أن الآلة الحاسبة تقرب العدد $٢^{١٠٥}$ إلى $٤.٠٥٦٤٨١٩٢١ \times ١٠^{٣١}$.

أي أن الآلة الحاسبة اعتبرت جميع الأرقام التي تأتي على يمين العدد ٤٠٥٦٤٨١٩٢١ والتي عددها ٢٢، أصفاراً. ولكن مما هو معلوم فإن العدد $٢^{١٠٥}$ لا يقبل القسمة على ٥ أي أن رقم آحاده لا يمكن أن يكون صفراً.

توجيه المعلم:

حلوا المسألة باستبدال العدد ١٠٥ مرة بالعدد ١، مرة بالعدد ٢، مرة بالعدد ٣، مرة بالعدد ٤، ومرة بالعدد ٥، وحاولوا استخلاص فكرة.

يتوصل التلاميذ إلى الجدول الآتي:

العدد	رقم آحاده
$٢^{١}$	٢
$٢^{٢}$	٤
$٢^{٣}$	٨
$٢^{٤}$	٦

$٢^{٥}$	٢
$٢^{٦}$	٤
$٢^{٧}$	٨
$٢^{٨}$	٦

من السهل أن يلاحظ التلاميذ أن الأرقام (٢,٤,٨,٦) تعود على نفسها، ومن السهل أن يكتشفوا: أنه عندما يكون n من مضاعفات العدد ٤ فإن: رقم آحاد العدد 2^n هو٦، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+1} هو ٢ ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+2} هو ٤ ، وأن رقم آحاد العدد 2^{n+3} هو ٨.

من هنا يكتشفون بسهولة أن رقم آحاد العدد $٢^{١٠٥}$ هو ٢ لأن ٢٦.٤+١=١٠٥.

المسألة الثانية:

في التصفيات للفوز ببطولة تنس الطاولة يشترك ١٠٠٠ لاعب. يشترك في كل مباراة لاعبان. كل مباراة تنتهي بفوز لاعب وخسارة اللاعب الآخر. اللاعب الخاسر في إحدى المباريات لا يشترك في مباريات أخرى، والفائز يواصل المشوار. البطل هو اللاعب الذي لم يخسر في أية مباراة بعد أن خسر كل لاعب من اللاعبين الآخرين في إحدى المباريات.

كم مباراة ستجرى؟

توجيه: حل المسألة باستبدال العدد ١٠٠٠ بالعدد ١ مرة، بالعدد ٢ مرة، بالعدد ٣ مرة، بالعدد ٤ مرة...

الجدول الذي سيتوصل إليه الطلاب:

عدد اللاعبين	عدد المباريات
٢	١
٣	٢
٤	٣
٥	٤

ومن السهل أن يكتشفوا أن عدد المباريات أقل بواحد من عدد اللاعبين، وعليه فإن الجواب في حالة كون اللاعبين ١٠٠٠ هو ٩٩٩.

قد يلاحظ الطلاب أن عدد المباريات يساوي عدد المهزومين، والأمر واضح فكل مهزوم سيشارك في مباراة واحدة فقط. ولكن ملاحظتهم هذه، وهي ملاحظة حكيمة، تأتي بعد معرفتهم للجواب، وهذه الملاحظة هي عملياً برهان على صحة إجابتهم.

المسألة الثالثة:

من أجل أن يدخل الشخص إلى القصر فإن عليه اجتياز ٥ بوابات. على كل بوابة يقف حارس. يأخذ الحارس من الشخص نصف ما معه من نقود ويعطيه ديناراً واحداً، كم كان في جعبة شخص دخل القصر ومعه ديناران؟

بعد أن يوجه المعلم المسألة لتلاميذه يجد أنهم يتسابقون إلى الإجابة: كان معه ديناران.

إن من عادة المعلم أن يسأل عن التفسير. وكعادتهم يقول الطلاب: نفحص ذلك. يباشر الطلاب في الفحص والمعلم غير مبال لما يقولون لأنه يعلم أن جوابهم صحيح. كيف يواصل المعلم؟

هناك معلم ينتقل إلى شيء آخر، قد يشجع الطلاب بكلمة جميلة وقد لا يفعل. هناك معلم يعرف أن طلابه قد توصلوا إلى النتيجة عن طريق التخمين، وفي نظرة "التخمين" ليس طريقة رياضية، فتراه يحملق في طلابه قائلاً: أريد طريقة لحل المسألة!! ماذا يحدث هنا! الطلاب حلو المسألة ولم يحصلوا على أي تعزيز من معلمهم، المعلم يشعر أنه لم يفد طلابه في شيء من عرضه لهذه المسألة من الناحية الرياضية. المسألة محلولة والمعلم يحث طلابه على حلها بطريقة رياضية. في هذه الحالة فإن المعلم يشعر طلابه بأن الرياضيات هو موضوع صعب المراس، نبحث فيه عن الطرق الصعبة لحل المسألة السهلة. ألا يسبب هذا إحباطاً لأفضل الطلاب!

أما المعلم الحكيم فإنه يفرح لفرح طلابه باكتشاف حل المسألة، فالمسألة هي أحجية جميلة. يتوجه إلى طلابه بالسؤال: ماذا يكون الجواب لو استبدلنا العدد ٥ بالعدد ١٠؟ بعد لحظات ينهض الطلاب يقولون: يبقى الجواب على ما هو، حتى لو استبدلنا العدد ٥ بالعدد ١٠٠ (أو بأي عدد آخر).

يتوجه إلى طلابه بطلب آخر: أبقوا العدد ٥ على حاله واستبدلوا كلمة "ديناران" ب "ثلاثة دنانير". بحماس شديد يتوجه الطلاب عازمين على حل المسألة، أشبه بفريق أحرز هدفين في مرمى الخصم في الدقائق الخمس الأولى. المعلم يراقب سلوك طلابه. قد يلاحظ أن بعضهم قد أهملوا حل المسألة. عندها يتوجه إليهم ويوجههم إلى تصغير عدد البواب من ٥ إلى ١ ومن ثم إلى ٢. عندما يكون عدد البوابات ١ فلا بد أن يلاحظ الطلاب أن ١+٢=٣ وأن ٢ هو نصف ما كان معه، لذلك كان معه ٤ دنانير.

وهذه الفكرة تقودهم لحل المسألة في حالة كون عدد البوابات ٢ فإن ٣+١=٤. العدد ٣ هو نصف ما كان معه. لذلك فقد كان معه ٦ دنانير. وهكذا يتوصلون إلى طريقة الحل التراجعي، ويكون جوابهم:

قبل البوابة الأولى كان معه ٤ دنانير، قبل البوابة الثانية كان معه ٦ دنانير، قبل الثلاثة كان معه ١٠ دنانير، قبل الرابعة كان معه ١٨ ديناراً. وقبل الخامسة كان معه ٣٤ ديناراً.

القاعدة التي قد ينطق بها الطلاب: نطرح ١ ونضرب الناتج في ٢.

من حل المسألة يتبين للطلاب أن "التخمين" طريقة قد يطول عدد مراحلها، وبذلك فهي تحتاج إلى الوقت الكثير، وبذلك فإن اهتمامهم بالتفكير التحليلي سيأخذ بالازدياد.

المسألة الرابعة:

احسب المجموع الآتي: ٩٩+٩٧+...+٥+٣+١

يقوم الطلاب بإجراء التجارب:

$١=١=١^٢$

$١+٣=٤=٢^٢$

$١+٣+٥=٩=٣^٢$

$١+٣+٥+٧=١٦=٤^٢$

يكتشف الطلاب أن مجموع الأعداد= تربيع عددها، وبما أن عدد الأعداد ٩٩...٥،٣،١ هو ٥٠ لذلك فإن مجموعها يساوي $٥٠^٢$ وهو يساوي ٢٥٠٠. قد يشك بعض الطلاب في صحة الإدعاء بأن عدد الأعداد ٥٠، ويمكن تفسير ذلك على النحو الآتي: عدد الأعداد الطبيعية ١٠٠...٣،٢،١ هو ١٠٠ نصفها زوجية ونصفها فردية، لذلك فإن عدد الأعداد الفردية هو ٥٠ والأعداد الفردية هي ٩٩...٥،٣،١.

ويمكن أن نعمم فنقول أن عدد الأعداد الفردية: 1,3,5,...,2n-1 هو n لذلك فإن:

$$1 + 3 + 5 + 7 +\ldots+ (2n-1) = n^2$$

قد يسأل بعض الطلاب عن مجموع الأعداد الزوجية. إن لم يحدث ذلك فيفضل أن يرشدهم المعلم لذلك. ما هو مجموع الأعداد ١٠٠ + ... + ٦ + ٤ + ٢ ؟

توجيه المعلم: أيهما أكبر ١٠٠ +...+ ٦ + ٤ + ٢ أم ٩٩ +...+ ٥ + ٣ + ١ وبكم؟

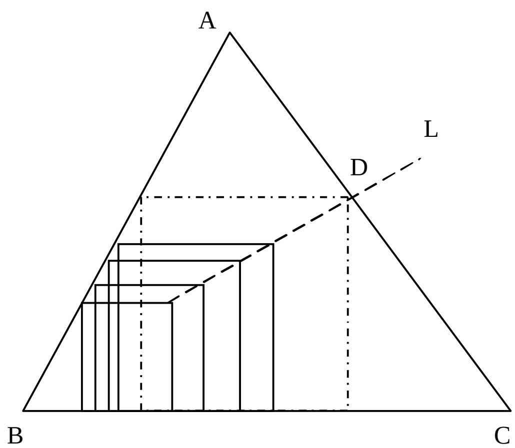
قد يجيب الطلاب إجابة صحيحة، وقد تسمع إجابات خاطئة. يطلب منهم الإجابة عن السؤال بالنسبة ل: ٤+٢ و ٣+١ وبالنسبة ل ٦+٤+٢ و ٥+٣+١، بعد هذا فإنهم سيتوصلون إلى النتيجة الصحيحة وهي:

١٠٠+ ... +٤+٢ يزيد ب٥٠ عن ٩٩ +...+ ٣ + ١ وعليه فإن ٢٥٥٠=١٠٠+...+٦+ ٤ + ٢.

ونستطيع أن نعمم ذلك على النحو التالي:

$2 + 4 + 6 + ... + 2n = n^2 + n = n (n + 1)$ ومن هنا ينتج أن: $1+2+3...+n=n(n+1)/2$.

المسألة الخامسة:



معطى المثلث ABC أرسم داخل المثلث مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC رأس على الضلع AB والرأس الرابع على الضلعAC.

توجيه: أرسم مربعاً بحيث يقع رأسان من رؤوسه على الضلع BC وأحد الرؤوس على الضلع AB. أجر التجربة عدة مرات.

سيكتشف الطلاب أن الرؤوس الأربعة لهذه المربعات تقع على مستقيم واحدL، لذلك فلا بد للرأس الرابع للمربع المطلوب أن يقع على هذا المستقيم. لذلك فإن الرأس الرابع للمربع المطلوب هو نقطة تقاطع المستقيم L مع الضلع AC (النقطة D في الشكل) بعد أن وجدنا D، ننزل منها عموداً على الضلع BC ونرسم منها موازياً للضلع BC وبواسطة القياس يتأكد الطلاب من صحة ما توصلوا إليه.

المسألة السادسة:

لنفرض أن ابناً لأبوين صالحين أنعم الله عليه بهداه فاستمع لنصح والديه فامتنع عن التدخين ومقابل ذلك اعتاد أن يوفر يومياً مبلغاً من المال يساوي ثمن علب السجائر الذي كان سيدفعه فيما

لو لم يفعل ذلك (لنفرض أن ذلك ٢٠ شيكلاً) لمدة خمسة أعوام. خلال هذه الفترة من الزمن فإنه سيدخر ما يقارب ٣٦٥٠٠ شيكلاً. (لأن ٣٦٥٠٠=٢٠×٣٦٥×٥، باعتبار أن العام ٣٦٥ يوماً). لنفرض أيضاً أن الوالدين كافآ ابنهما فأكملا المبلغ إلى ما يعادل ١ كيلو غرام من الذهب. ولنفرض أن هذا الابن بدأ مشروعاً اقتصادياً برأس المال هذا

(١ كيلو غرام ذهب)، وأن الله سبحانه وتعالى بارك له في مشروعه، وأن الابن سعى في السبل الشرعية من أجل أن يزيد رأس ماله بنسبة 20% عاماً بعد عام، وأن الله يسر له الأمور وحقق له مسعاه، فماذا سيصير رأس ماله بعد عشرين عاماً؟ بعد خمسين عاماً؟

الحل: نبدأ بتقصي الأمور.

في نهاية العام الأول سيصير رأس المال ١.٢ كغم من الذهب، وهو رأس المال مع بداية العام الثاني.

لذلك ففي نهاية العام الثاني سيصير رأي المال ^{٢}(١.٢) =(١.٢)*(٠.٢)+(١.٢).

وبنفس الطريقة نكتشف أن رأس المال في نهاية العام الثالث سيصير ^{٣}(١.٢) كغم من الذهب. من هنا نكتشف أن رأس المال سيصير في نهاية العام رقم n مساوياً $(1.2)^n$ كغم من الذهب. وباستعمال الحاسبة نجد أن: ٣٨.٣٤=^{٢٠}(١.٢) تقريباً و ٩١٠٠=^{٥٠}(١.٢) تقريباً.

أي أن رأس المال سيصير بعد عشرين عاماً ما يقارب ٣٨ كيلو غراماً و ٣٤٠ غراماً من الذهب. وسيصير رأس المال بعد خمسين عاماً ما يضاهي قليلاً ٩١٠٠ كيلو غراماً من الذهب. إنه لأمر مدهش حقاً. فلو افترضنا أن رأس المال البدائي كان ٥٠٠٠٠ شيكلاً فإن رأس المال سيصير بعد ٥٠ عاماً ما يضاهي خمسة وأربعين مليوناً من الشواكل.

كثيراً ما تجد أناساً أتقياء قد أنعم الله عليهم ورزقهم رزقاً وفيراً، هم عرضة لظن الناس بهم سوء نزاهتهم، رغم أنه لم يثبت من ذلك شيء. من هذا الحساب قد يجد أولئك الأشخاص دفاعاً عن نزاهتهم فيتقون ظن السوء بهم. إن توجيه هذه المسألة للطلاب من شأنه حثهم على عدم الإسراف، تجنب التدخين، ورفع معنويات الفقراء منهم. إذ تتعزز لديهم الآمال بتحسن أوضاعهم المالية مستقبلاً إذا عملوا بجد ومثابرة، وإن السبيل بحاجة إلى الصبر، فيسعون إلى التحلي به، يطردون الحسد من نفوسهم فيتقون شروره عليهم وعلى الناس.

إن الحلول والنتائج التي توصل إليها التلاميذ في المسائل الست السابقة هي نتائج صحيحة، وإن هذه المسائل هي أمثلة لمسائل يمكن عرضها للتلاميذ في مراحل الدراسة الإعدادية وحتى

الابتدائية. في مراحل متقدمة من واجب المعلم أن يلفت نظر تلاميذه إلى أن ليس كل ما يلمع ذهباً. فهناك قضايا يمكن أن يكتشفوها ويتبين أنها ليست صحيحة دائماً. لنضرب مثلاً على ذلك:

القضية: ١- 2^p هو عدد أولي لكل p أولي. نلاحظ أن ١-$٢^{٢}$=٣ =عدداً أولياً، ١-$٢^{٣}$=٧=عدداً أولياً، ١-$٢^{٥}$=٣١ =عدداً أولياً، ١-$٢^{٧}$=١٢٧ =عدداً أولياً. وقد يتسرع الطالب ويظن أن القضية هي قضية صواب دائماً، ولكن عندما نفحص صحة القضية بالنسبة للعدد ١١ نلاحظ أن ١-$٢^{١١}$=٢٠٤٧ وهو ليس بعدد أولي لأن ٨٩×٢٣=٢٠٤٧ . هذا الأمر يحتم علينا برهان صحة النظريات التي نكتشفها.

إن من الأهداف التي يجب على معلم الرياضيات أن يعمل على تحقيقها في تلميذه، أن يصير تلميذه قادراً على الاكتشاف في شتى مجالات العلوم، محللاً للنتائج ورابطاً بينها، عارفاً أن هناك العام وأن هناك الخاص، عالماً أن هناك الممكن وأن هناك المستحيل، لديه القدرة على توقع القضايا، مدركاً جواز صواب القضية وجواز عكس ذلك وأن أمامه سبيلين إما البرهان وإما التفنيد، وأن إزالة شرط من شروط القضية يعني التعميم، وأن إضافة شرط لشروط القضية معناه التخصيص، فاهماً أن موضوع الرياضيات يبنى على المصطلحات والبديهيات. وأن للمصطلح مفهوماً لا يقبل التأويل، وأن البديهية غير قابلة للدحض ولا للبرهان، وأن نفي البديهية لا يمكن دحضه ولا برهانه، فمن الجائز اعتباره "بديهية". عادة يؤخذ بالبديهية التي تتفق مع العقل الإنساني، وإذا أخذ بنفيها على أنه بديهية فإن ما يبنى على أساسه صحيح من الناحية الرياضية، وصحيح في عالم خيالي قد يدرك العقل الإنساني ماهيته فيما بعد.